Proceedings of IAM, V.3, N.2, 2014, pp.235-241

НАХОЖДЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ УРОВНЯ НУЛЬ ПРОЦЕССОМ ПОЛУМАРКОВСКОГО БЛУЖДАНИЯ

У.Я. Керимова[1]

[1]Институт Кибернетики НАНА, Баку, Азербайджан
e-mail: ulviyye_kerimova@yahoo.com

Резюме. В данной статье находится преобразование Лапласа момента первого достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания с положительным сносом, отрицательными скачками.

Ключевые слова: случайная величина, процесс полумарковского блуждания, преобразование Лапласа, эрланговское распределение.

AMS Subject Classification: 60A10, 60J25, 60G50.

1. Введение

Нахождению преобразования Лапласа распределения момента достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания посвящено много работ. Некоторые авторы при решении такой задачи пользовались асимптотическим методом, факторизационным методом и т.д. ([2,3,5]). А другие авторы, ([8] ,[6]) сузив класс распределений блуждания, нашли явный вид преобразования Лапласа распределения процесса и его, основных граничных функционалов. В работе [1] найдено асимптотическое разложение распределения первого момента пересечения уровня нуль. В [7] найден явный вид для преобразования Лапласа распределения скачкообразного процесса полумарковского блуждания с задерживающим экраном науровне $a > 0$. В данной работе исследуется распределение процесса полумарковского блуждания с положительным сносом, отрицательными скачками. и находятся преобразование Лапласа-Стильтъеса распределения момента первого достижения уровня нуль этим процессом полумарковского блуждания.

2. Математическая постановка задачи

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P(\cdot)\}$ задана последовательность $\{\xi_k, \zeta_k\}_{k\geq 1}$ независимых, одинаково распределенных и независимых между собою случайных величин ξ_k и ζ_k, $k = \overline{1,\infty}$. Используя эти случайные величины, построим следующий процесс полумарковского блуждания

$$X(t)=z+t-\sum_{i=1}^{k-1}\zeta_i, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{k-1}\xi_i \le t < \sum_{i=1}^{k}\xi_i, \quad k=\overrightarrow{1,\infty}. \qquad (1)$$

$X(t)$ назовем процессом полумарковского блуждания с положительным сносом и отрицательными скачками.

Момент первого достижения уровня нуль процессом $X_1(t)$ обозначим через τ_1^0

$$\tau_1^0 = \min\{t : X(t) \le 0\}.$$

Наша цель найти преобразование Лапласа распределения случайной величины τ_1^0.

Введем следующие обозначения:

$$L(\theta)=Ee^{-\theta\tau_1^0}, \ \theta>0. \qquad (2)$$

$$L(\theta\,|\,z)=E(e^{-\theta\tau_1^0}\,|\,X(0)=z), \ z\ge 0.$$

$L(\theta)$ - преобразование Лапласа распределения случайной величины τ_1^0.

В этом случае

$$\tau_1^0=\begin{cases}\xi_1, & z+\xi_1-\zeta_1<0\\ \xi_1+T, & z+\xi_1-\zeta_1>0,\end{cases}$$

где T и τ_1^0 одинаково распределенные случайные величины. Отметим, что случайные величины T и τ_1^0 не сами, а их распределения равны. Так как система сперва выходит из состояния z и впервые достигает ось времени t, т.е. получаем момент τ_1^0. Дальше система выходит из состояния $z+\xi_1-\zeta_1$ и впервые достигает ось времени t, т.е. получаем момент τ_1^0. В работе найден преобразование Лапласа условного и безусловного распределения случайной величины τ_1^0.

3. Составление интегрального уравнения для преобразования Лапласа распределения момента достижения уровня нуль

По формуле полной вероятности имеем:

$$L(\theta\,|\,z)=E(e^{-\theta\tau_1^0}\,|\,X(0)=z)=\int_{\Omega}e^{-\theta\tau_1^0}P(d\omega\,|\,X(0)=z)=$$

$$=\int_{\{\omega: z+\xi_1-\zeta_1<0\}}e^{-\theta\xi_1}\,P(d\omega)+\int_{\{\omega: z+\xi_1-\zeta_1>0\}}e^{-\theta(\xi_1+T)}\,P(d\omega).$$

Применив некоторые подстановки получим

$$E(e^{-\theta\tau_1^0} \mid \mathrm{X}(0)=\mathrm{z}) = \int_{s=0}^{\infty}\int_{y=z+s}^{\infty} e^{-\theta\,\mathrm{s}} P\{\xi_1 \in ds; \zeta_1 \in dy\} +$$

$$+\int_{s=0}^{\infty}\int_{y=0}^{z+s}\int_{\beta=0}^{\infty} e^{-\theta\,(\mathrm{s}+\beta)} P\{\xi_1 \in ds; \zeta_1 \in dy; \mathrm{T} \in \mathrm{d}\beta\} =$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} P\{\xi_1 \in ds\} \int_{y=z+s}^{\infty} P\{\,\zeta_1 \in dy\,\} +$$

$$+\int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} \int_{y=0}^{z+s} dP\{\,\zeta_1 < y\,\} dP\{\xi_1 < s\} \mathrm{L}(\theta \mid \mathrm{z}+\mathrm{s}-\mathrm{y}) =$$

$$= \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} P\{\xi_1 \in ds\} P\{\,\zeta_1 > z+s\,\} +$$

$$+\int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} \int_{\beta=z+s}^{0} L(\theta \mid \beta)\, dP\{\,\zeta_1 < \mathrm{z}+s-\beta\,\} dP\{\xi_1 < s\}$$

или

$$L(\theta \mid z) = \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}}\; P\{\,\zeta_1 > z+s\,\} P\{\xi_1 \in ds\} +$$

$$+\int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} \int_{y=0}^{z+s} L(\theta \mid \mathrm{z}+s-y)\, P\{\,\zeta_1 \in dy\,\} P\{\xi_1 \in ds\}.$$

Сделаем замену переменных $z+s-y=\alpha$, тогда получим интегральное уравнение для $L(\theta \mid z)$

$$L(\theta \mid z) = \int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}}\; P\{\,\zeta_1 > z+s\,\} P\{\xi_1 \in ds\} +$$

$$+\int_{s=0}^{\infty} e^{-\theta \mathrm{s}} \int_{\alpha=0}^{z+s} L(\theta \mid \alpha)\, \mathrm{d}_{\alpha} P\{\,\zeta_1 < z+s-\alpha\,\} \mathrm{d}P\{\xi_1 < s\}. \tag{3}$$

4. Решение интегрального уравнения (3)

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений. В этом случае полученное решение будет непригоден для приложений. Поэтому интегральное уравнение (3) будем решать в классе эрланговских распределений. Исследование этого уравнения будем вести в случае, когда случайные величины ξ_1 и ζ_1 имеют эрланговское распределение первого и второго порядка соответственно.

$$\{\zeta_1(\omega) < t\} = 1 - e^{-\mu \mathrm{t}} \qquad , \mathrm{t} > 0, \quad \mu > 0,$$
$$\{\xi_1(\omega) < t\} = 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda \mathrm{t}} \quad , \mathrm{t} > 0, \quad \lambda > 0.$$

Учитывая предположения о распределений случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\zeta_1(\omega)$ из (3) имеем

$$\begin{aligned} L(\theta \mid z) &= \frac{\lambda^2 e^{-\mu \mathrm{z}}}{(\lambda + \mu + \theta)^2} - \\ &- \lambda^2 \mu e^{-\mu \mathrm{z}} \int\limits_{s=0}^{\infty} s\, e^{-(\lambda+\mu+\theta)\mathrm{s}} \int\limits_{\alpha=0}^{z+s} e^{\mu\alpha} L(\theta \mid \alpha)\, d\alpha\, \mathrm{ds}. \end{aligned} \tag{4}$$

Обе части (4) умножив на $e^{\mu \mathrm{z}}$ и продифференцировав по z, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} &L'''(\theta \mid \mathrm{z}) - [2(\lambda + \theta) - \mu]\, L''(\theta \mid z) + \\ &+ (\lambda + \theta)(\lambda + \theta - 2\mu)\, \mathrm{L}'(\theta \mid \mathrm{z}) + (2\lambda + \theta)\mu\theta\, \mathrm{L}(\theta \mid \mathrm{z}) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$L(\theta \mid \mathrm{z}) = C_1(\theta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{k}_1(\theta)\mathrm{z}} + C_2(\theta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{k}_2(\theta)\mathrm{z}} + C_3(\theta)\, \mathrm{e}^{\mathrm{k}_3(\theta)\mathrm{z}}, \tag{6}$$

корни $k_i(u)$, $\mathrm{i} = \overline{1,3}$, уравнения (6) находятся из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} &k^3(u) - [2(\lambda + \theta) - \mu]k^2(u) + \\ &(\lambda + \theta)(\lambda + \theta - 2\mu)k(u) + (2\lambda + \theta)\mu\theta\, \mathrm{L}(\theta \mid \mathrm{z}) = 0. \end{aligned}$$

Функции $C_i(u)$, $\mathrm{i} = \overline{1,3}$ находятся из граничных условий:

$$\begin{cases} L(\theta \mid 0) = \dfrac{\lambda^2}{\lambda + \mu + \theta} + \lambda^2 \mu \displaystyle\int\limits_{\mathrm{s}=0}^{\infty} \mathrm{s}\, \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu+\theta)\mathrm{s}} \int\limits_{\alpha=0}^{0} e^{\mu\alpha}\, d\alpha ds \\ \mathrm{L}'(\theta \mid 0) = -\mu\, \mathrm{L}(\theta \mid 0) + \lambda^2 \mu \displaystyle\int\limits_{\mathrm{s}=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\theta)\mathrm{s}}\, \mathrm{L}(\theta \mid \mathrm{s})\, \mathrm{ds} \\ L''(\theta \mid 0) = \mu(\lambda + \theta)\, \mathrm{L}(\theta \mid 0) + (\lambda + \theta - \mu)\, \mathrm{L}'(\theta \mid 0) - \lambda^2 \mu \displaystyle\int\limits_{\mathrm{s}=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda+\theta)\mathrm{s}}\, \mathrm{L}(\theta \mid \mathrm{s})\, \mathrm{ds}. \end{cases}$$

Из этих условий, учитывая выражение (6) , получим следующую систему уравнений относительно $C_1(u)$ и $\mathrm{C}_2(u)$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}\left[1-\dfrac{\lambda^2\mu[2(\lambda+\theta)+\mu-k_i(\theta)]}{[\lambda+\theta-k_i(\theta)]^2[\lambda+\mu+\theta]^2}\right]\mathrm{C_i}(\theta)=\dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\mu+\theta)^2} \\ \sum_{i=1}^{3}\left[\mu+k_i(\theta)-\dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\theta-k_i(\theta)}\right]\mathrm{C_i}(\theta)=0 \\ \sum_{i=1}^{3}\left[[k_i(\theta)]^2+[\mu-\lambda-\theta]\,\mathrm{k_i}(\theta)-\mu(\lambda+\theta)+\dfrac{\lambda^2\mu}{\lambda+\theta-k_i(\theta)}\right]\mathrm{C_i}(\theta)=0. \end{cases} \tag{7}$$

С помощью теоремы Вьета легко можно показать, что

$$[\mu+k_1(\theta)][\mu+k_2(\theta)][\mu+k_3(\theta)]=\lambda^2\mu.$$

После некоторых преобразований граничные условия (7) примут вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}[k_1(\theta)-(\lambda+\theta)]^2\ C_1(\theta)=\lambda^2 \\ 0\times C_1(\theta)+0\times C_2(\theta)+0\times C_3(\theta)=0 \\ 0\times C_1(\theta)+0\times C_2(\theta)+0\times C_3(\theta)=0. \end{cases} \tag{8}$$

Так как, (8) является системой линейно зависимых уравнений, то

$$C_2(\theta)=C_3(\theta)=0,\quad \theta>0,$$

$$C_1(\theta)=\frac{\lambda^2}{[\lambda-k_1(\theta)+\theta]^2}.$$

Таким образом, общее решение (6) примет вид:

$$L(\theta\,|\,z)=C_1(\theta)e^{k_1(\theta)z}=\frac{\lambda^2}{[\lambda+\theta-k_1(\theta)]^2}e^{k_1(\theta)z}. \tag{9}$$

Это и есть условное преобразование Лапласа распределения случайной величины τ_1^0.

Так как случайная величина $\xi_1(\omega)$ имеет распределение эрланга то, безусловное преобразование Лапласа распределения случайной величины τ_1^0 будет выражаться следующим образом:

$$L(\theta)=\int_{z=0}^{\infty}L(\theta\,|\,z)\,\lambda^2\ \mathrm{z\,e}^{-\lambda z}dz=\int_{z=0}^{\infty}C_1(\theta)e^{k_1(\theta)z}\lambda^2\mathrm{ze}^{-\lambda z}dz=\frac{\lambda^2}{[\lambda-k_1(\theta)]^2}C_1(\theta) \tag{10}$$

Можно найти некоторые характеристики случайной величины τ_1^0 при $\lambda>m$. По свойству преобразования Лапласа случайной величины τ_1^0:

$$E\tau_1^0=-L'(0)=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda(\lambda-2\mu)}$$

$$L''(0)=\frac{8\mu^2}{\lambda^2(\lambda-2\mu)^2}+\frac{2\mu}{\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}+\frac{2\lambda}{(\lambda-2\mu)^3}.$$

Аналогично, можно найти дисперсию τ_1^0.

$$D\tau_1^0=L''(0)-(L'(0))^2=\frac{8\mu^2}{\lambda^2(\lambda-2\mu)^2}+\frac{16\mu}{\lambda(\lambda-\mu)(\lambda-2\mu)}+$$

$$+\frac{3\lambda}{(\lambda-2\mu)^3}-\frac{4(\lambda+2\mu)^2}{\lambda^2(\lambda-2\mu)^2}$$

$$E(\tau_1^0\mid z)=\frac{2(1+z\mu)}{\lambda-2\mu}$$

$$D(\tau_1^0\mid z)=\frac{2}{(\lambda-2\mu)^2}+\frac{(2+z\mu)\mu}{(\lambda-2\mu)^3}.$$

5. Заключение

В статье найден явный вид преобразования Лапласа-Стильтъеса распределения времени первого достижения уровня нуль процессом полумарковского блуждания. Полученные результаты могут быть применены в теории массового обслуживания, в теории страхования, в теории финансов, а также в теории управления запасами.

Литература

1. Borovkov A.A. On the asymptotic behavior of the distributions of first-passage, Mat. Zametki, 2004, Vol.75, No.1, pp.24–39.
2. Klimov. G.P., Stochastic queuening systems, Moscow, Nauka, 1966.
3. Lebowitz J.L., Percus J.K. Asymptotic Behavior of the Radial Distribution Function, J. Math. Phys. 4, 248, 1963.
4. Lotov V.I. On some boundary crossing problems for gaussian random walks, The Annals of Probab., 24, 1996, pp.2154–2171.
5. Lotov.V.I., On the asymptotic of distributions in the sited boundary problems for random walks defined a Markov chain, Sib.Math. Vol.1, No.3, 1991, pp.26-51.
6. Nasirova T.H, Kerimova U.Y. Definition of Laplace ransform of the first passage of zero level of the semimarkov random process with positive tendency and negative jump, Applied mathematics, 2011, 2, pp 908-912.
7. Omarova K.K Laplace transformation of ergodic distribution of the step process of semi-markov random walk with delaying screen at positive point, The Third International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics”, 2010.

8. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания М., Наука, 1972

Semi-markov dolaşma prossesinin sıfır oxunu keçmə anının paylanmasının Laplas çevirməsinin tapılması

Ü.Y. Kərimova

XÜLASƏ

Stoxastik prosseslər nəzəriyyəsində ən mühüm problemlərdən biri, semi-markov dolaşma prossesinin paylanmasının Laplas çevirməsinin tapılmasıdır. Bu məqsədlə, təqdim olunan işdə müsbət meylli və mənfi sıçrayışlı semi-markov dolaşma prossesi araşdırılır. Prossesin birinci dəfə sıfır oxunu keçməsi anı təsadüfi kəmiyyət kimi daxil edilir. Bu təsadüfi kəmiyyətin paylanmasının Laplas çevirməsi tapılır.

Açar sözlər: təsadüfi kəmiyyət, semi-markov dolaşma prossesi, Laplas çevirməsi, erlanq paylanması

Determination of Laplace transforms for distribution of the first passage of zero level of the semi-markov random process

U.Y. Kerimova

ABSTRACT

One of the important problems of stochastic process theory is to define the Laplace transforms for the distribution of semi-markov random processes. With this purpose, we will investigate the semi-markov random processes with positive tendency and negative jump in this article. The first passage of the zero level of the process will be included as a random variable. The Laplace transforms for the distribution of this random variable is defined.

Keywords: random variable, semi-markov random process, Laplace transforms, erlangian distribution