Proceedings of IAM, V.8, N.2, 2019, pp.196-201

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ УРОВНЯ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДАНИЕМ, ОПИСЫВАЕМОМ ОБОБЩЕННЫМ ПРОЦЕССОМ АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА*

Фархадова А.Д.

Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: farxadovaaynura@gmail.com

Резюме. В работе доказывается теорема об усиленном законе больших чисел для семейства моментов первого пересечения уровня случайным блужданием, описываемом обобщенным процессом авторегрессии первого порядка.

Keywords: случайное блуждание, процесс авторегрессии, момент первого пересечения, усиленный закон больших чисел.

AMS Subject Classification: 60G50.

1. Введение.

Пусть $\xi_n, n \geq 1$ есть последовательность независимых случайных величин с $E\xi_n = 0$ и $\infty > D_n = D\xi_n > 0$.

Рассмотрим последовательность $X_n, n \geq 0$ случайных величин, определенных из рекуррентных уравнений

$$X_{n+1} = \beta X_n + \xi_{n+1}, \tag{1}$$

где начальное значение X_0 не зависит от $\xi_n, n \geq 1$ и β некоторое число, $-\infty < \beta < \infty$.

Будем интерпретировать X_n как результат наблюдения (измерения) в момент времени n.

Будем предполагать, что $EX_0^2 < \infty$. Как известно, статистическая оценка для неизвестного параметра β, полученная по методу наименьших квадратов по результатам $X_0, X_1, \ldots, X_n$, имеет следующий вид [8, стр. 555]

$$\beta_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{D_{k+1}}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{D_{k+1}}}. \tag{2}$$

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 10.09.2019

Если $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k^2}{D_{k+1}} = 0$, то будем полагать, что $\beta_n = 0$.

Обозначим $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k \xi_{k+1}}{D_{k+1}}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_n^2}{D_{k+1}}$ и $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_k X_{k+1}}{D_{k+1}}$.

Ясно, что из (1) и (2) следует, что

$$\beta_n = \frac{C_n}{A_n} = \beta + \frac{M_n}{A_n}. \tag{3}$$

Из (3) вытекает, что сходимость $\beta_n \xrightarrow{п.н.} \beta$ при $n \to \infty$ имеет место тогда и только, когда

$$\frac{M_n}{A_n} \xrightarrow{п.н.} 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{4}$$

Как показано в [8, стр. 556], условия

$$\sup_n \frac{D_{n+1}}{D_n} < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E} \min\left\{1, \frac{\xi_n^2}{D_n}\right\} = \infty \tag{5}$$

достаточны для выполнения (4) и, следовательно, достаточны для выполнения сходимости $\beta_n \xrightarrow{п.п.} \beta,\ n \to \infty$.

Отметим, что для независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n с $E\xi_n = 0$, но $0 < \sigma^2 = D\xi_n < \infty,\ n \geq 1,$ последовательность $X_n, n \geq 1$ называется процессом авторегрессии с дискретным временем первого порядка $(AR(1))$ (см. [1], [2], [7]).

Для процесса $AR(1)$ с $EX_0^2 < \infty$ и $|\beta| < 1$, как показано в работе [1], (см. также [7]) имеет место

$$\frac{A_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \frac{1}{\sigma^2(1-\beta^2)}, n \to \infty$$

и

$$\frac{C_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \frac{\beta}{\sigma^2(1-\beta^2)}, n \to \infty.$$

Из этих соотношений вытекает, что

$$\beta_n = \frac{C_n}{A_n} \xrightarrow{п.н.} \beta \text{ при } n \to \infty.$$

Ясно, что для независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n условия (5) заведомо выполняются.

Рассмотрим семейство моментов первого пересечения

$$\tau_a = \inf\{n \geq 1 : \theta_n \geq a\}$$

уровня $a > 0$ процессом $\theta_n = n\beta_n,\ n \geq 1$.

В настоящей заметке доказывается теорема об усиленном законе больших чисел для семейства $\tau_a,\ a > 0$.

Подобные задачи изучены для случая независимых одинаково распределенных случайных величин в работах [2]-[6].

Теорема. Пусть выполняются условия (5) и $0 < \beta < \infty$. Тогда имеет место

1) $P(\tau_a < \infty) = 1$ для всех $a > 0$.

2) $\tau_a \xrightarrow{п.н.} \infty$ при $a \to \infty$

3) $\dfrac{\tau_a}{a} \xrightarrow{п.н.} \dfrac{1}{\beta}$ при $a \to \infty$.

Доказательство. Из условия (5) вытекает, что

$$\beta_n \xrightarrow{п.н.} \beta \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно

$$\frac{\theta_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \beta \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому имеет

$$P\left(\sup_n \theta_n = \infty\right) = 1.$$

Отсюда следует утверждение 1).

Как видно, величина τ_a , как функция от параметра a не убывает. Вследствие этого мы имеем

$$P\left(\tau_\infty = \lim_{a\to\infty} \tau_a \leq \infty\right) = 1.$$

Ясно, что для всех $n \geq 1$

$$P\left(\tau_\infty \leq n\right) = P\left(\lim_{a\to\infty} \tau_a \leq n\right) =$$

$$= \lim_{a\to\infty} P\left(\tau_a \leq n\right) = \lim_{a\to\infty} P\left(\tau_\infty = \infty\right) = 1.$$

Отсюда следует, что $P\left(\tau_\infty = \infty\right) = 1$.

Таким образом, доказано утверждение 2).

Теперь докажем утверждение 3) доказываемой теоремы.

По определению величин τ_a имеем

$$\frac{\theta_{\tau_a - 1}}{\tau_a} \leq \frac{a}{\tau_a} \leq \frac{\theta_{\tau_a}}{\tau_a}. \qquad (6)$$

Докажем, что

$$\frac{\theta_{\tau_a}}{\tau_a} \xrightarrow{п.н.} \beta \text{ при } a \to \infty . \tag{7}$$

С этой целью положим

$$A = \left\{ \omega : \frac{\theta_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} \beta \right\}$$

$$B = \left\{ \omega : \frac{\theta_{\tau_a}}{\tau_a} \underset{a\to\infty}{\to} \beta \right\}$$

$$C = \left\{ \omega : \tau_a \underset{a\to\infty}{\to} \infty \right\}.$$

Как уже показано выше,

$$P(A) = P(C) = 1.$$

Следовательно $P(A \cap C) = 1.$

Ясно, что $A \cap C \subset B$. Поэтому $P(B) = 1$.

Таким образом доказано (7).

Теперь утверждение 3) следует из (6) и (7).

Утверждение 3) теоремы носит название усиленного закона больших чисел типа Колмогорова для процесса τ_a, $a > 0$.

Теорема доказана.

Заключение. В работе доказана теорема об усиленном законе больших чисел для семейства моментов первого пересечения уровня процессом, описываемом обобщенной схемой авторегрессии , который содержит в себе случай авторегрессии первого порядка (AR(1))

ЛИТЕРАТУРА

1. Melfi V.F. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications, The Annals of Probability, V.20, N.2, 1992, pp.753-771.
2. Novikov A.A., Ergashev B.A. Limit theorem for the passage time of the level by autoregression process, Tr. MIAN, V.202, 1993, pp.209-233.
3. Rahimov F.H., Abdurakhmanov V.A., Hashimova T.E. On the asymptotics of the mean value of the moment of first level-crossing by the first order autoregression process AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXIV, N.4, 2014, pp.93-96.
4. Rahimov F.H., Azizov F.J., Khalilov V.S. Integral limit theorems for the first passage time for the level of random walk, described by a nonlinear function of the sequence autoregression AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXIV, N.1, 2014, pp.99-104.

5. Rahimov F.H., Azizov F.J., Khalilov V.S. Integral limit theorems for the first passage time for the level of random walk, described with AR(1) sequences. Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXII, N.4, 2013, pp.95-100.
6. Rahimov F.H., Hashimova T.E., Farkhadova A.D. Integral limit theorems for the first passage time of the level by a random walk, described by autoreqression process of order one AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXV, N.1, 2015, pp.81-86.
7. Pollard D., Convergence of Stochastic Processes, Springer, New-York, 1984.
8. Ширяев А.Н. Вероятность, М., 1989, 574с.

ON THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR THE FAMILY OF MOMENTS OF THE FIRST LEVEL CROSSING BY RANDOM WALK, DESCRIBED BY THE GENERALIZED FIRST-ORDER AUTOREGRESSIVE PROCESS

Farkhadova A.D.

Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
e-mail: farxadovaaynura@gmail.com

ABSTRACT

In the paper the theorem of strong law of large numbers for the family of moments of the first level crossing by random walk has been proved, described by the generalized first-order autoregressive process.

Keywords: random walk, autoregressive process, moment of the first crossing, strong law of large numbers.

REFERENCES

1. Melfi V.F. Nonlinear Markov renewal theory with statistical applications, The Annals of Probability, V.20, N.2, 1992, pp.753-771.
2. Novikov A.A., Ergashev B.A. Limit theorem for the passage time of the level by autoregression process, Tr. MIAN, V.202, 1993, pp.209-233.
3. Rahimov F.H., Abdurakhmanov V.A., Hashimova T.E. On the asymptotics of the mean value of the moment of first level-crossing by the first order autoregression process AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXIV, N.4, 2014, pp.93-96.
4. Rahimov F.H., Azizov F.J., Khalilov V.S. Integral limit theorems for the first passage time for the level of random walk, described by a nonlinear

function of the sequence autoregression AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXIV, N.1, 2014, pp.99-104.

5. Rahimov F.H., Azizov F.J., Khalilov V.S. Integral limit theorems for the first passage time for the level of random walk, described with AR(1) sequences. Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXII, N.4, 2013, pp.95-100.
6. Rahimov F.H., Hashimova T.E., Farkhadova A.D. Integral limit theorems for the first passage time of the level by a random walk, described by autoreqression process of order one AR(1), Transaction of NAS of Azerbaijan, V.XXXV, N.1, 2015, pp.81-86.
7. Pollard D., Convergence of Stochastic Processes, Springer, New-York, 1984.
8. Shiryaev A.N. Veroyatnost', M., 1989, 574 p. (Shiryaev A.N. Probability, M., 1989, 574p.) (in Russian).